Объединенная межвузовская математическая олимпиада 05.02.2012

Общие критерии оценивания

По результатам проверки каждого задания выставляется одна из следующих оценок (перечислены в порядке убывания):
«$+$» — задача решена полностью;
«$\pm$» — задача решена с недочетами, не влияющими на общий ход решения (например, допущена арифметическая ошибка в конце правильного решения);
«$\mp$» — задача не решена, но имеются содержательные продвижения (например, задача решена для содержательного частного случая);
«$-$» — задача не решена;
за задачу, к решению которой участник не приступал, ставится оценка «0».

При подведении итогов учитывается только количество в целом решенных задач — задач, за которые поставлена оценка «$+$» или «$\pm$».

Некоторые критерии по задачам

Задача 1. Верный пример с неверным подсчетом доли — «$\pm$».
Пример, в котором мужчин и женщин не поровну (например, сказано про 25 троек, а про остальных людей ничего не сказано) — не выше «$\mp$».

Задача 3. Используется неверное утверждение «последняя цифра числа a^b зависит только от последней цифры числа b» — не выше «$\mp$».
Используется неверное тождество $a^{(b^c)} = (a^b)^c$ — не выше «$\mp$».

Задача 5. За запись ответа с использованием арккосинусов (см. замечание к решению) оценка не снижается.
Получен верный ответ, который потом неправильно “упрощен” — «$\pm$».
Неверно решено простейшее тригонометрическое уравнение (напр., $\sin 3x = 0$) — не выше «$\mp$».

Задача 6. В целом верное решение с неравносильными преобразованиями без проверки получившегося ответа — «$\pm$».

Задача 7. Верная “квазипериодичность” типа $f(x+2c) = f(x) + c$ замечена на числовых примерах, но не доказана (после чего получен верный ответ) — «$\mp$».
Используется неверная “квазипериодичность” (с вдвое меньшим “периодом“) — «$\mp$».

Задача 8. Утверждается (но не доказано), что величина угла максимальна, когда окружность касается второй стороны угла, после чего получен верный ответ — «$\pm$».
Утверждается, что максимальным является прямой угол — «$-$»(даже если получен верный ответ).

Задача 9. Объяснено, как выглядят на плоскости решения обоих уравнений и чему геометрически соответствует условие на параметр, но ответ вычислен неверно — «$\pm$».
Вместо нужной задачи решается задача о том, при каких значениях параметра система имеет решения — «$\mp$».

Задача 10. Неравенство о средних можно использовать без доказательства.
Рассмотрение отдельных частых случаев (например, куба) — «$-$».

I вариант (ответы и краткие решения)

Задача 1. Посадим сначала за стол вперемежку 25 женщин и 25 пар мужчин. После этого заменим одну из женщин рядом 26 женщин.

В итоге за столом рядом с каждый из 50 мужчин сидит женщина, а женщин, рядом с которыми сидит мужчина, будет 26 (24 сидящих между парами и две женщины на краях “ряда”). Таким образом, для данной рассадки отношение есть $\frac{50}{26} = 2 - \frac{1}{13} > 2 - \frac{1}{10} = 1{,}9$.
Ответ. Да, может.

Задача 2. Приравняв суммарное количество бракованных изделий до и после перемещения, получаем ответ.
Ответ. 150.

Задача 3. Так как 7^4 оканцивается цифрой 1, последовательность последних цифр числа 7^n периодична с периодом 4. В частности (так как 2012 в любой степени делится на 4), цифрой 1 оканчивается первое слагаемое. Аналогично для второго слагаемого.
Ответ. 0.

Задача 4. Продлим медиану. Получим треугольник ABA' ($AD = DA'$), равновеликий исходному, со сторонами 5, 6 и 7. Его площадь легко найти по формуле Герона:

$$S_{ABC} = S_{BDA'} = \sqrt{9 \cdot (9-5) \cdot (9-6) \cdot (9-7)} = 6\sqrt{6}.$$

Замечание. Длина стороны AC равна $4\sqrt{7}$.
Ответ. $6\sqrt{6}$.

Задача 5. Домножим обе части уравнения на $\sin\frac{x}{2}$ (преобразование равносильно, так как на указанном отрезке это выражение не обращается в ноль). Перепишем $2\sin\frac{x}{2}\sin kx$ как $\cos\frac{2k-1}{2}x - \cos\frac{2k+1}{2}x$. После этого сократятся все слагаемые, кроме первого и последнего.

Таким образом, корни исходного уравнения совпадают с корнями уравнения

$$\cos\frac{1}{2}x - \cos\frac{11}{2}x = 0,$$

т. е. (переходя от разности обратно к произведению) уравнения

$$\sin 3x \cdot \sin\frac{5}{2}x = 0.$$

Корни последнего уравнения — числа вида $\frac{\pi k}{3}$ и $\frac{2\pi l}{5}$.

Осталось просуммировать корни, попавшие в нужный промежуток:

$$\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + \left(\frac{2\pi}{5} + \frac{4\pi}{5}\right) = \frac{11\pi}{5}.$$

Ответ. $\frac{11\pi}{5}$.
Замечание. $\arccos\frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \frac{2\pi}{5}$ (в частности, ответ $\pi + \arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right) + \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)$ тоже правильный).

Задача 6. “Перевернем” каждое из уравнений системы:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy} = 1; \\ \dfrac{y+z}{yz} = \dfrac{1}{2}; \\ \dfrac{x+z}{xz} = \dfrac{1}{3}; \end{cases}$$

(преобразование равносильно, так как ни одна из правых частей не может обратиться в ноль).

Заметим, что $\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ и т. д. Поэтому мы получили систему линейных уравнений на $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$.

Решая ее, получаем $\frac{1}{x} = \frac{5}{12}$, $\frac{1}{y} = \frac{7}{12}$, $\frac{1}{z} = -\frac{1}{12}$.
Ответ. $x = \frac{12}{5}$, $y = \frac{12}{7}$, $z = -12$

Задача 7. Применяя условие $f(x+3) = x+2-f(x)$ дважды, получаем, что $f(x+6) = f(x)+3$. Соответственно, $f(2012) = f(-1+3+6\cdot 335) = (-1+2-f(-1))+3\cdot 335 = 1005$.
Ответ. 1005.

Задача 8. Проведем через точки A и B окружность, касающуюся второй стороны угла. Если C — точка касания, то угол ACB равен половине дуги AB. В противном случае угол ACB равен полуразности дуги AB и второй дуги, высекаемой углом ACB — т. е. будет меньше.

Остается воспользоваться тем, что квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть.
Ответ. $\sqrt{5}$.

Задача 9. Вспомнив, что $a + b + |a - b| = 2\max(a, b)$, нетрудно понять, что каждое из уравнений системы задает квадрат с центром в начале координат: первое уравнение — квадрат со сторонами, параллельными осям координат, второе уравнение — со сторонами, идущими под углом $45°$.

Поэтому система имеет не более 8 решений.
Ответ. $(3, 6)$.

Задача 10. Пусть ящик имеет размеры $x\times y\times z$. Тогда веревка должна иметь длину $2x + 6y + 4z$. Но по неравенству о средних

$$2x + 4y + 6z \geqslant 3\sqrt[3]{2x\cdot 6y\cdot 4z} = 6\sqrt[3]{6\cdot 37} > 6\sqrt[3]{6\cdot 36} = 36.$$

Ответ. Нет.

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **05.02.2012**

II вариант (ответы и краткие решения)

Задача 1. Посадим сначала за стол вперемежку 25 женщин и 25 пар мужчин. После этого заменим одну из женщин рядом 26 женщин.

В итоге за столом рядом с каждый из 50 мужчин сидит женщина, а женщин, рядом с которыми сидит мужчина, будет 26 (24 сидящих между парами и две женщины на краях "ряда"). Таким образом, для данной рассадки отношение есть $\frac{50}{26} = 2 - \frac{1}{13} > 2 - \frac{1}{10} = 1{,}9$.
Ответ. Да, может.

Задача 2. Приравняв сумму всех чисел до и после перемещения, получаем ответ.
Ответ. 66.

Задача 3. Так как 7^4 оканцивается цифрой 1, последовательность последних цифр числа 7^n периодична с периодом 4. В частности (так как 2012 в любой степени делится на 4), цифрой 1 оканчивается первое слагаемое. Аналогично для второго слагаемого.
Ответ. 2.

Задача 4. Продлим медиану. Получим треугольник ABA' ($AD = DA'$), равновеликий исходному, со сторонами 7, 8 и 9. Его площадь легко найти по формуле Герона:

$$S_{ABC} = S_{BDA'} = \sqrt{12 \cdot (12-7) \cdot (12-8) \cdot (12-9)} = 12\sqrt{5}.$$

Замечание. Длина стороны AC равна 14.
Ответ. $12\sqrt{5}$.

Задача 5. Домножим обе части уравнения на $\sin\frac{x}{2}$ (преобразование равносильно, так как на указанном отрезке это выражение не обращается в ноль). Перепишем $2\sin\frac{x}{2}\sin kx$ как $\cos\frac{2k-1}{2}x - \cos\frac{2k+1}{2}x$. После этого сократятся все слагаемые, кроме первого и последнего.

Таким образом, корни исходного уравнения совпадают с корнями уравнения

$$\cos\frac{1}{2}x - \cos\frac{11}{2}x = 0,$$

т. е. (переходя от разности обратно к произведению) уравнения

$$\sin 3x \cdot \sin\frac{5}{2}x = 0.$$

Корни последнего уравнения — числа вида $\frac{\pi k}{3}$ и $\frac{2\pi l}{5}$.

Осталось просуммировать корни, попавшие в нужный промежуток:

$$\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{5\pi}{3}\right) + \left(\frac{6\pi}{5} + \frac{8\pi}{5}\right) = \frac{29\pi}{5}.$$

Ответ. $\frac{29\pi}{5}$.
Замечание. $\arccos\frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \frac{2\pi}{5}$ (в частности, ответ $7\pi - \arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right) - \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)$ тоже правильный).

Задача 6. “Перевернем” каждое из уравнений системы:

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{ab} = 1; \\ \dfrac{b+c}{bc} = \dfrac{1}{2}; \\ \dfrac{c+a}{ca} = \dfrac{1}{4}; \end{cases}$$

(преобразование равносильно, так как ни одна из правых частей не может обратиться в ноль).

Заметим, что $\frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ и т. д. Поэтому мы получили систему линейных уравнений на $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ и $\frac{1}{c}$.

Решая ее, получаем $\frac{1}{a} = \frac{3}{8}$, $\frac{1}{b} = \frac{5}{8}$, $\frac{1}{c} = -\frac{1}{8}$.

Ответ. $a = \frac{8}{3}$, $b = \frac{8}{5}$, $c = -8$.

Задача 7. Применяя условие $g(x+5) = x+3-g(x)$ дважды, получаем, что $g(x+10) = g(x)+5$. Соответственно, $g(2012) = g(-3+5+10\cdot 201) = (-3+3-g(-3))+5\cdot 201 = 1006$.

Ответ. 1006.

Задача 8. Проведем через точки A и B окружность, касающуюся второй стороны угла. Если C — точка касания, то угол ACB равен половине дуги AB. В противном случае угол ACB равен полуразности дуги AB и второй дуги, высекаемой углом ACB — т. е. будет меньше.

Остается воспользоваться тем, что квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть.

Ответ. $\sqrt{6}$.

Задача 9. Вспомнив, что $a + b + |a - b| = 2\max(a, b)$, нетрудно понять, что каждое из уравнений системы задает квадрат с центром в начале координат: первое уравнение — квадрат со сторонами, параллельными осям координат, второе уравнение — со сторонами, идущими под углом $45°$.

Поэтому система имеет не более 8 решений.

Ответ. $(3, 6)$.

Задача 10. Пусть ящик имеет размеры $x \times y \times z$. Тогда веревка должна иметь длину $2x + 6y + 4z$. Но по неравенству о средних

$$2x + 4y + 6z \geqslant 3\sqrt[3]{2x \cdot 6y \cdot 4z} = 3\sqrt[3]{48 \cdot 63} = 18\sqrt[3]{14} > 18 \cdot \frac{12}{5} = 43{,}2.$$

Ответ. Нет.

III вариант (ответы и краткие решения)

Задача 1. Посадим сначала за стол вперемежку 25 женщин и 25 пар мужчин. После этого заменим одну из женщин рядом 26 женщин.

В итоге за столом рядом с каждый из 50 мужчин сидит женщина, а женщин, рядом с которыми сидит мужчина, будет 26 (24 сидящих между парами и две женщины на краях “ряда”). Таким образом, для данной рассадки отношение есть $\frac{50}{26} = 2 - \frac{1}{13} > 2 - \frac{1}{10} = 1{,}9$.
Ответ. Да, может.

Задача 2. Приравняв суммарное количество производимых за смену деталей до и после перемещения, получаем ответ.
Ответ. 22.

Задача 3. Так как 17^4 оканцивается цифрой 1, последовательность последних цифр числа 17^n периодична с периодом 4. В частности (так как 2012 в любой степени делится на 4), цифрой 1 оканчивается первое слагаемое. Аналогично для второго слагаемого.
Ответ. 0.

Задача 4. Продлим медиану. Получим треугольник ABA' ($AD = DA'$), равновеликий исходному, со сторонами 5, 6 и 7. Его площадь легко найти по формуле Герона:

$$S_{ABC} = S_{BDA'} = \sqrt{9 \cdot (9-5) \cdot (9-6) \cdot (9-7)} = 6\sqrt{6}.$$

Замечание. Длина стороны AC равна $4\sqrt{7}$.
Ответ. $6\sqrt{6}$.

Задача 5. Домножим обе части уравнения на $\sin\frac{x}{2}$ (преобразование равносильно, так как на указанном отрезке это выражение не обращается в ноль). Перепишем $2\sin\frac{x}{2}\sin kx$ как $\cos\frac{2k-1}{2}x - \cos\frac{2k+1}{2}x$. После этого сократятся все слагаемые, кроме первого и последнего.

Таким образом, корни исходного уравнения совпадают с корнями уравнения

$$\cos\frac{1}{2}x - \cos\frac{11}{2}x = 0,$$

т. е. (переходя от разности обратно к произведению) уравнения

$$\sin 3x \cdot \sin\frac{5}{2}x = 0.$$

Корни последнего уравнения — числа вида $\frac{\pi k}{3}$ и $\frac{2\pi l}{5}$.

Осталось просуммировать корни, попавшие в нужный промежуток:

$$\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + \left(\frac{2\pi}{5} + \frac{4\pi}{5}\right) = \frac{11\pi}{5}.$$

Ответ. $\frac{11\pi}{5}$.

Замечание. $\arccos\frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \frac{2\pi}{5}$ (в частности, ответ $\pi + \arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right) + \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)$ тоже правильный).

Задача 6. "Перевернем" каждое из уравнений системы:

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{ab} = 1; \\ \dfrac{b+c}{bc} = \dfrac{1}{2}; \\ \dfrac{c+a}{ca} = \dfrac{1}{4}; \end{cases}$$

(преобразование равносильно, так как ни одна из правых частей не может обратиться в ноль).

Заметим, что $\frac{a+b}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ и т. д. Поэтому мы получили систему линейных уравнений на $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$ и $\frac{1}{c}$.

Решая ее, получаем $\frac{1}{a} = \frac{3}{8}$, $\frac{1}{b} = \frac{5}{8}$, $\frac{1}{c} = -\frac{1}{8}$.
Ответ. $a = \frac{8}{3}$, $b = \frac{8}{5}$, $c = -8$.

Задача 7. Применяя условие $h(x+6) = x+2-h(x)$ дважды, получаем, что $h(x+12) = h(x)+6$. Соответственно, $h(2012) = g(2+6+12\cdot 167) = (2+2-h(2))+6\cdot 167 = 1001$.
Ответ. 1001.

Задача 8. Проведем через точки A и B окружность, касающуюся второй стороны угла. Если C — точка касания, то угол ACB равен половине дуги AB. В противном случае угол ACB равен полуразности дуги AB и второй дуги, высекаемой углом ACB — т. е. будет меньше.

Остается воспользоваться тем, что квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть.
Ответ. $\sqrt{21}$.

Задача 9. Вспомнив, что $a+b+|a-b| = 2\max(a,b)$, нетрудно понять, что каждое из уравнений системы задает квадрат с центром в начале координат: первое уравнение — квадрат со сторонами, параллельными осям координат, второе уравнение — со сторонами, идущими под углом 45°.

Поэтому система имеет не более 8 решений.
Ответ. $(4,8)$.

Задача 10. Пусть ящик имеет размеры $x \times y \times z$. Тогда веревка должна иметь длину $2x+6y+4z$. Но по неравенству о средних

$$2x+4y+6z \geqslant 3\sqrt[3]{2x\cdot 6y\cdot 4z} = 6\sqrt[3]{6\cdot 37} > 6\sqrt[3]{6\cdot 36} = 36.$$

Ответ. Нет.

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **05.02.2012**

IV вариант (ответы и краткие решения)

Задача 1. Посадим сначала за стол вперемежку 25 женщин и 25 пар мужчин. После этого заменим одну из женщин рядом 26 женщин.

В итоге за столом рядом с каждый из 50 мужчин сидит женщина, а женщин, рядом с которыми сидит мужчина, будет 26 (24 сидящих между парами и две женщины на краях "ряда"). Таким образом, для данной рассадки отношение есть $\frac{50}{26} = 2 - \frac{1}{13} > 2 - \frac{1}{10} = 1{,}9$.
Ответ. Да, может.

Задача 2. Приравняв суммарную зарплату до и после перемещения, получаем ответ.
Ответ. 14.

Задача 3. Так как 7^4 оканцивается цифрой 1, последовательность последних цифр числа 7^n периодична с периодом 4. В частности (так как 2012 в любой степени делится на 4), цифрой 1 оканчивается первая из степеней. Аналогично для второй из степеней.
Ответ. 7.

Задача 4. Продлим медиану. Получим треугольник ABA' ($AD = DA'$), равновеликий исходному, со сторонами 7, 8 и 9. Его площадь легко найти по формуле Герона:

$$S_{ABC} = S_{BDA'} = \sqrt{12 \cdot (12-7) \cdot (12-8) \cdot (12-9)} = 12\sqrt{5}.$$

Замечание. Длина стороны AC равна 14.
Ответ. $12\sqrt{5}$.

Задача 5. Домножим обе части уравнения на $\sin\frac{x}{2}$ (преобразование равносильно, так как на указанном отрезке это выражение не обращается в ноль). Перепишем $2\sin\frac{x}{2}\sin kx$ как $\cos\frac{2k-1}{2}x - \cos\frac{2k+1}{2}x$. После этого сократятся все слагаемые, кроме первого и последнего.

Таким образом, корни исходного уравнения совпадают с корнями уравнения

$$\cos\frac{1}{2}x - \cos\frac{11}{2}x = 0,$$

т. е. (переходя от разности обратно к произведению) уравнения

$$\sin 3x \cdot \sin\frac{5}{2}x = 0.$$

Корни последнего уравнения — числа вида $\frac{\pi k}{3}$ и $\frac{2\pi l}{5}$.

Осталось просуммировать корни, попавшие в нужный промежуток:

$$\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{5\pi}{3}\right) + \left(\frac{6\pi}{5} + \frac{8\pi}{5}\right) = \frac{29\pi}{5}.$$

Ответ. $\frac{29\pi}{5}$.
Замечание. $\arccos\frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \frac{2\pi}{5}$ (в частности, ответ $7\pi - \arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right) - \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)$ тоже правильный).

Задача 6. "Перевернем" каждое из уравнений системы:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy} = 1; \\ \dfrac{y+z}{yz} = \dfrac{1}{2}; \\ \dfrac{x+z}{xz} = \dfrac{1}{3}; \end{cases}$$

(преобразование равносильно, так как ни одна из правых частей не может обратиться в ноль).

Заметим, что $\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ и т. д. Поэтому мы получили систему линейных уравнений на $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$ и $\frac{1}{z}$.

Решая ее, получаем $\frac{1}{x} = \frac{5}{12}$, $\frac{1}{y} = \frac{7}{12}$, $\frac{1}{z} = -\frac{1}{12}$.

Ответ. $x = \frac{12}{5}$, $y = \frac{12}{7}$, $z = -12$

Задача 7. Применяя условие $u(x+7) = x-5-u(x)$ дважды, получаем, что $u(x+14) = u(x) + 7$. Соответственно, $u(2012) = u(3+7+14\cdot 143) = (3-5-u(3)) + 7\cdot 143 = 1003$.

Ответ. 1003.

Задача 8. Проведем через точки A и B окружность, касающуюся второй стороны угла. Если C — точка касания, то угол ACB равен половине дуги AB. В противном случае угол ACB равен полуразности дуги AB и второй дуги, высекаемой углом ACB — т. е. будет меньше.

Остается воспользоваться тем, что квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть.

Ответ. $\sqrt{15}$.

Задача 9. Вспомнив, что $a + b + |a-b| = 2\max(a,b)$, нетрудно понять, что каждое из уравнений системы задает квадрат с центром в начале координат: первое уравнение — квадрат со сторонами, параллельными осям координат, второе уравнение — со сторонами, идущими под углом $45°$.

Поэтому система имеет не более 8 решений.

Ответ. $(4, 8)$.

Задача 10. Пусть ящик имеет размеры $x \times y \times z$. Тогда веревка должна иметь длину $2x + 6y + 4z$. Но по неравенству о средних

$$2x + 4y + 6z \geqslant 3\sqrt[3]{2x\cdot 6y\cdot 4z} = 3\sqrt[3]{48\cdot 63} = 18\sqrt[3]{14} > 18\cdot\frac{12}{5} = 43{,}2.$$

Ответ. Нет.